

数 学

(数 学)

答 案 作 成 上 の 注 意

1. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に記入しなければいけません。
2. 数学は 19 ページから 22 ページまでです。
3. 解答用紙の受験番号欄は 3 か所です。氏名を書いてはいけません。
また、※印欄には何も記入してはいけません。
4. 解答には筆記用具、消しゴム以外のものを使用してはいけません。
5. 特に指示のない限り、解答は計算等の過程も記入しなければいけません。
6. 問題冊子と使用しない解答用紙は持ち帰ってください。

問題 1 以下の各問に答えよ。なお、解答は答えのみでよい。

(1) $\sqrt{3} \div \sqrt[3]{3} \times \sqrt[12]{243} \div \sqrt[3]{9}$ を計算せよ。

(2) 関数 $f(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 5$ の極大値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

(3) a は 5 未満の実数とする。変量 x の 8 個の値からなるデータ

$$5, 6, 6, 8, 10, 0, 3, a$$

を考える。このデータの平均値を $\bar{x}$ とし、中央値を M とする。

(i) M を求めよ。

(ii) $|\bar{x} - M| < 1$ であるための必要十分条件を a を用いて表せ。

(4) 次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^2 (x^2 + |x|) dx$$

(5) 次の和を求めよ。

$$\sum_{k=11}^{20} (3k^2 - 4k + 2)$$

(6) 次の空欄 ア を適切な式で埋めよ。適切な式は 2 つ以上あるが、そのうち 1 つを答えよ。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{ア}}{h}$$

で書き表される。

問題 2 xy 平面上の円 $C_1: x^2 + y^2 = 65$ を考える。点 $A\left(\frac{13}{2}, 13\right)$ からこの円に引いた 2 本の接線との接点を $S(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$ とする。ただし、 $x_1 < x_2$ とする。以下の各問に答えよ。

(1) 2 点 S , T の座標を求めよ。

(2) 円 C_1 上の点 S における接線を ℓ_1 とし、円 C_1 上の点 T における接線を ℓ_2 とする。円 C_1 のうち $y \geq 0$ の部分が表す曲線を C_2 とする。曲線 C_2 と 2 直線 ℓ_1 , ℓ_2 で囲まれた、境界線を含む領域を D とする。 D を図示せよ。

(3) 点 $P(x, y)$ が(2)の領域 D を動くとき、 $x + 3y$ の最大値と、そのときの点 P の座標を求めよ。また、 $x + 3y$ の最小値と、そのときの点 P の座標を求めよ。

(4) 点 $P(x, y)$ が(2)の領域 D を動くとき、 $x(x - 6) + y(y - 8)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし、そのときの点 P の座標は求めなくてよい。

問題 3 関数 $f(x) = -\sqrt{3} \sin(2x) + \cos(2x)$ を考える。以下の各問に答えよ。

- (1) 次の文章の空欄 ア , イ , ウ , エ に適切な値を入れて文章を完成させよ。なお, ア には, あてはまる正の値を答えよ。また, イ には, あてはまる正の値の中で最小のものを答えよ。

関数 $f(x)$ は $f(x) = \text{ア} \sin\left(2x + \text{イ}\right)$ と表すことができる。

したがって, $y = f(x)$ のグラフは, $y = \text{ア} \sin(2x)$ のグラフを x 軸方向に ウ だけ平行移動したものであることがわかる。ただし, $-\pi \leq \text{ウ} < \frac{\pi}{2}$ とする。また, この関数 $f(x)$ は エ を周期とする周期関数である。

- (2) $0 \leq x < \pi$ のとき, 関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

問題 4 原点を O とする座標空間において, 点 $A(2, 0, 0)$, 点 $B(0, 1, 0)$, 点 $C(0, 0, 2)$, 点 $D\left(-1, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ をとり, 線分 BC を $2:1$ に内分する点を E とする。また, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。以下の各問に答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{DE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面を α とする。直線 DE が平面 α に垂直であることを示せ。
- (3) 四面体 $DABE$ の体積 V を求めよ。